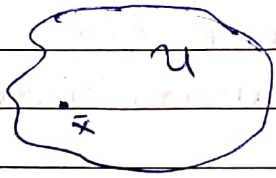
16/11/2020

Θεώρημα 3.2.2



$U \subset \mathbb{R}^2$ (γενικώς: $\mathbb{R}^n$) ανοιχτό

$\bar{x} = (x_1, x_2)$

$\exists \ \frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$ [σ' όλο το U ∃]

και οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς [αυτές, όχι η f] στο $\bar{x} \in U$

$\Rightarrow$ η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ [όχι οι μερ. παρ.]

Σχόλιο για την εφαρμογή του ΘΜΤ [για πραγμ. συναρτ. μιας πραγμ. ανεξ. μεταβλητής $\to$ σχολείο, ΑΠΕΙ1]:

$$f(\bar{y}^{(k-1)} + h_k \bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)}), \quad \bar{y}^{(k-1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \bar{e}_i$$

Θέτουμε $g(\theta) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \theta h_k \bar{e}_k), \quad \theta \in [0,1]$

Τότε $g(1) - g(0)$ [$= f(\bar{y}^{(k-1)} + h_k \bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)})$]

$\underset{ΘΜΤ}{=} g'(\underbrace{\theta_k}_{\in (0,1) \subset [0,1]}) = h_k H'(\theta_k h_k)$, όπου $H(\lambda) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$

με $g(\theta) = H(\theta h_k)$

Για επόμενη διαφάνεια:

$H(\lambda) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow H'(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{y}^{(k-1)} + (\lambda + h)\bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$$

Παρατήρηση ①. Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Η $\bar{f}$ λέγεται συνεχώς διαφορίσιμη, αν υπάρχουν όλες οι μερ. παρ. $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$, $i=1,\dots,n$

[Ισοδ. αν υπάρχει ο Ιακωβιανός της $\bar{f}$ σε κάθε $\bar{x} \in U$] και είναι [οι μερ. παρ.!] συνεχείς [$\Leftrightarrow$ συνεχώς μερ. διαφ/μη]

(αναλυτικά)

Συμβολισμοί: $\bar{f} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, αν $m=1$, δηλ. $f: U \to \mathbb{R}$ πραγματική, τότε $f \in C^1(U)$

② Το Θεώρημα 3.2.2, όπως και κάθε θεώρημα που αφορά συνέχεια ή διαφορισιμότητα μπορώ να το εφαρμόσω και τοπικά [γιατί η συνέχεια και η διαφορισιμότητα (λειότητα) είναι τοπικές ιδιότητες].
Στην πράξη: Αν μου δίνουν μια συνάρτηση f ορισμένη π.χ. σε ένα μη ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$, τότε μπορώ να εφαρμόσω όλα τα θεωρήματα σε έναν περιορισμό $f|_V$ όπου $V \subset U$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

① $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$: συνεχής [αντίστροφη τριγωνική ανισότητα] σ' όλο το $\mathbb{R}^n$. Δεν είναι μερικώς διαφ/μη στο $\bar{x}=\bar{0}$
[π.χ. για $n=2$ η $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ δεν είναι μερ. διαφ. στο $(0,0)$ αφού $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \nexists$]

② $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αλλά είναι μερικώς διαφ. στο $(0,0)$ $\to$

Π.χ. για $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$ αλλά $f(x_\nu, y_\nu) = f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} =$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$, ανάλογα για $\frac{\partial f}{\partial y} = (0,0)$

(3) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

Είναι συνεχής στο $(0,0)$: είναι μερ. διαφ. στο $(0,0)$, αλλά δεν είναι διαφ/μη στο $(0,0)$

[$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(2ab \leq a^2+b^2)}{\leq} \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

Συνεπώς αν $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \overset{\text{ορ.}}{\iff} \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$ τότε:

$0 \leq |f(x_\nu, y_\nu)| \leq \frac{1}{2} \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0 \overset{\text{Θ. ισοσυγκλ.}}{\Longrightarrow}$ (παρεμβολής)

$\Rightarrow f(x_\nu, y_\nu) \to 0 \Rightarrow$ από ορισ. συνέχειας f.. συνεχής στο $(0,0)$

f μερ. διαφ. στο $(0,0)$, αφού $f(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και ανάλογα $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$

$\Rightarrow \exists \ \text{grad} f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$

Όμως [ενώ είναι μερ. διαφ. στο $(0,0)$] δεν είναι διαφ. στο $(0,0)$

Εξετάζω με ορισμό: $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - \operatorname{grad}f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \nexists$

[Γιατί $\nexists$? Παίρνω $\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 / 2\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$

$\frac{1}{\nu}\cdot 0 / \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + 0^2 = 0 \to 0$]

Παρατήρηση (3) Ένας κλασικός τρόπος να ελέγξω διαφορισιμότητα σ' ένα σημείο: υπολογίζω Ιακωβιανό και αν υπάρχει ελέγχω αν ισχύει:

$\lim\limits_{\bar{u}\to\bar{0}} \dfrac{f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - Jf(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$

(4) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$

είναι διαφ/μη σ' όλο το $\mathbb{R}^2$, αλλά όχι συνεχώς διαφ/μη στο $(0,0)$ δηλ. οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε κάποιο $B((0,0),\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, αλλά δεν είναι συνεχείς [οι μερ. παρ.] στο $(0,0)$

(βλ. Σημ. σελ 89 παρ. 3.2.2)